8. （行列の対角化と基準座標）問題５で求めた二つの基準振動数 $\omega_{\pm}$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{A}^{\pm}$ を使って行列 $\mathbf{M}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}^{+}, \mathbf{A}^{-}) = \begin{pmatrix} A_1^{+} & A_1^{-} \\ A_2^{+} & A_2^{-} \end{pmatrix}$$

この行列の逆行列を $\mathbf{M}^{-1}$ とするとき、行列 $\mathbf{K}$ は

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega_{+}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{-}^2 \end{pmatrix}$$

で対角化されることを示しなさい。また、それぞれの基準振動数に対応する基準座標 X_{+}、X_{-} は

$$\begin{pmatrix} X_{+} \\ X_{-} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

で得られることを示しなさい。

9. （自由度 N の連成振動）質量 m の N 個のおもりを天井から長さ l のひもで等間隔につるし、バネ定数 k の同じバネで一直線に繋いだ系を考える。両端の重りは、やはりバネ定数 k のバネで両側の壁に繋がれているとする。この系の１次元的な運動について、次の問いに答えなさい。

   1) 時刻 t での n 番目のおもりの平衡位置からの変位、$x_n(t)$ $(1 \geq n \geq N)$、の従う運動方程式を書きなさい。但し、壁の位置に仮想的におもりがあるとして、その変位にたいし、$x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$ という固定端の境界条件をおくことにする。但し、変位は $x_n(t) << l$ という条件をみたし、バネに繋がれていない時、それぞれのおもりは振動数 $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ の調和振動をするものとする。
   2) この連立運動方程式の基準振動解を、$x_n(t) = A\sin(np+\phi)\cos(\omega t+\delta)$ と仮定して、ω、p、ϕ のみたす条件を求めなさい。
   3) 両端のおもりが壁に繋がれておらず自由端の境界条件、$x_0(t) = x(t)_1$、$x_N(t) = x(t)_{N+1}$、をみたす場合、ω、p、ϕ のみたす条件を求めなさい。

10. （連続体極限）上問で N の値を大きくしていった極限を考える。平衡位置ではおもりは区間 $(0, L)$ の間に等間隔 $a = L/(N+1)$ で並んでいるものとする。また、平衡位置 $x = na$ にあったおもりの時刻 t での変位を x の連続関数 $u(t, x)$ をつかってあらわす。すなわち、$x_n(t) = u(t, na)$ とおく。

   1) $x_{n+1}(t) = u(t, na+a)$ を $x = na$ の近傍で Taylor 展開した式、$u(t, na+a) = u(t, na) + a\frac{\partial u}{\partial x}(t, na) + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, na) + \ldots$、を使って、

$$2x_n(t) - x_{n-1}(t) - x_{n+1}(t) = -a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \ldots$$

   を示し、問題１で求めた運動方程式から $u(t, x)$ が次の波動方程式に従うことを示しなさい。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \omega_0^2 u$$

   2) $u(t, x)$ の従う境界条件を、固定端と自由端の場合に求めなさい。