振動・波動論　例題 1　 解答

2011 年 11 月 5 日

2. 略

5.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x) = -ax + bx^3 = 0$$

のとき、

$$x = 0, \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

このうち極小値を与えるのは $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}(= \pm x_0)$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}V(x)\right|_{x=x_0} = -a + 3b \times \frac{a}{b} = 2a$$

より、$x = x_0$ まわりで、テーラー展開すると、$|x - x_0|$ が微小のとき

$$V(x) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2} \times 2a(x - x_0)^2$$

よって、

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x) = -2a(x - x_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2a}{m}}$$

7.

地球の中心を原点として、まっすぐな穴に沿って x 軸をとる。位置が x の場所での重力は 、

$$F = -\frac{Gm}{x^2} \times \frac{x^3}{R^3}M = -\frac{GMm}{R^3}x$$

よって、

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GMm}{R^3}x$$
$$\therefore \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{GM}{R}}, f = \frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$GM=gR^2$ より、$\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$, $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ となり、数値を代入して、

$$T=5077[\mathrm{s}]$$

人工衛星については $m\omega^2R=\frac{GMm}{R^2}\Leftrightarrow\omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{GM}{R}}$ より、地球縦貫トンネルのと一致。

地表の点二つを P,Q とし、P,Q の中点を原点として P,Q にそって y 軸をとる。$PQ=2R\sin\theta$ とおくと、重力の大きさは地球縦貫トンネルのときより $\frac{GmM}{R^3}\sqrt{R^2\cos^2\theta+y^2}$ となるから、重力の y 成分は、

$$\frac{GmM}{R^3}\sqrt{R^2\cos^2\theta+y^2}\times\frac{y}{\sqrt{R^2\cos^2\theta+y^2}}=-\frac{GmM}{R^3}y$$
$$\therefore m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{GmM}{R^3}y$$

よって $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ で、これも周期が変わらない。

9.

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-6\pi\kappa R\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega^2x=0\ \ (k=m\omega^2,6\pi\kappa R=2m\gamma)$$

数値を入れると $\omega>\gamma$ より、一般解は

$$x=A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t+\phi\right)$$

振幅が半減するとき、$\mathrm{e}^{-\gamma t}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{\gamma}\ln 2$

よってこの間に振動した回数は、

$$\frac{t}{T}=\frac{\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}{2\pi}\times\frac{\ln 2}{\gamma}$$

数値を代入して、

$$1.2\times10^4(\text{回})$$