振動・波動論　例題２

シケ対作成

2011 年 12 月 8 日提出

6.

1)

$$
\begin{aligned}
V &= mgl(1-\cos\theta_1) + mgl(2-\cos\theta_1-\cos\theta_2) \\
&= 2mgl(1-\cos\theta_1) + mgl(1-\cos\theta_2)
\end{aligned}
$$

$\cos\theta_1 = \sqrt{1-(\frac{x_1}{l})^2}, \cos\theta_2 = \sqrt{1-(\frac{x_2-x_1}{l})^2}, \sqrt{1-y} = 1-\frac{y}{2}+\cdots$ より、

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{mg}{2l}(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \\
\therefore m\ddot{x}_1 &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{mg}{l}(3x_1 - x_2) \\
m\ddot{x}_2 &= -\frac{\partial V}{\partial x_2} = -\frac{mg}{l}(-x_1 + x_2)
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \frac{3g}{l} & -\frac{g}{l} \\ -\frac{g}{l} & \frac{g}{l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{とおいて、} \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \cdots \# \text{となるようにする。}
\end{aligned}
$$

授業で求めた公式に代入して、

$$
\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}(2-\sqrt{2})}\ ,\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})}
$$

3) ここでも授業で求めた公式に代入して、

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= u_{11}\{x_1 + (1+\sqrt{2})x_2\} \\
x'_2 &= u_{21}\{x_1 + (1-\sqrt{2})x_2\}
\end{aligned}
$$

4) 初期条件から $x'_1(0) = u_{11}(2+\sqrt{2})\mathit{\Delta}, x'_2(0) = u_{21}(2-\sqrt{2})\mathit{\Delta}, \dot{x}'_1(0) = \dot{x}'_2 = 0$。# より、

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= u_{11}(2+\sqrt{2})\cos\omega_1 t \\
x'_2 &= u_{21}(2-\sqrt{2})\cos\omega_2 t
\end{aligned}
$$

3) から、連立方程式を解いて

$$x_1 = \frac{\mathit{\Delta}}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$
$$x_2 = \mathit{\Delta}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\cos\omega_1 t + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\cos\omega_2 t\right)$$

7.

1)

$$M\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \tag{1}$$
$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3) \tag{2}$$
$$M\ddot{x}_3 = k(x_2 - x_3) \tag{3}$$

2)$(1)+(2)+(3)$ より、

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(Mx_1 + mx_2 + Mx_3) = 0$$

$x_1' = Mx_1 + mx_2 + Mx_3$は重心の並進運動を表し、振動しない。

3)$x_2' = x_1 - x_3, x_3' = x_1 - \frac{2M}{m}x_2 + x_3$ とすれば、

$(1)-(3)$ より、

$$M\ddot{x'}_2 = -kx_2' \quad \therefore \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

また、$(1) - \frac{2M}{m}(2) + (3)$ より、

$$M\ddot{x'}_3 = -\frac{m+2M}{m}kx_3' \quad \therefore \omega_3 = \sqrt{\frac{m+2M}{mM}k}$$

9.

1)

$$m\ddot{x}_n = -\left[(2k + m\omega_0^2)x_n - kx_{n-1} - kx_{n+1}\right]$$

2) 代入して、和積を使って、

$$\begin{aligned}-m\omega^2 A\sin(np+\phi)\cos(\omega t+\delta) &= -A\left[(2k+m\omega_0^2)\sin(np+\phi) - k\{\sin((n-1)p+\phi) + \sin((n-1)p+\phi)\}\right] \\ &\quad \times\cos(\omega t+\delta) \\ &= -A(2k + m\omega_0^2 - 2k\cos p)\sin(np+\phi)\cos(\omega t+\delta)\end{aligned}$$

すべての n, t で成り立つので、

$$\begin{aligned}m\omega^2 &= 2k + m\omega_0^2 - 2k\cos p \\ &= 4k\sin^2\frac{p}{2} + m\omega_0^2 \\ \omega &= \sqrt{\frac{4k}{m}\sin^2\frac{p}{2} + \omega_0^2}\end{aligned}$$

$n=0$ と $n=N+1$ のときから、

$$x_0(t) = A\sin\phi\cos(\omega t+\delta) = 0 \quad \therefore \phi = 0$$
$$x_{N+1}(t) = A\sin(N+1)p\cos(\omega t+\delta) = 0 \quad \therefore p = \frac{i\pi}{N+1} \quad (1 \leq i \leq N)$$

3)ω については 2) と同じ。

$x_0 = x_1, x_N = x_{N+1}$ より、

$$\begin{aligned} \sin\phi &= \sin(p+\phi) \\ \sin(Np+\phi) &= \sin[(N+1)p+\phi] \\ \text{よって}\ \sin(Np) &= 0, \phi = \frac{\pi - p}{2} \\ \therefore p &= \frac{i\pi}{N} \quad (0 \leq i \leq N-1) \end{aligned}$$