1. Q_gが対称行列 $\Leftrightarrow {}^tQ_g = Q_g$ 　であり

$${}^tQ_g = {}^t({}^tgg) = {}^tg\,{}^t({}^tg) = {}^tgg = Q_g$$

より Q_g は対称行列

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Q_g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= {}^t\boldsymbol{v}Q_g\boldsymbol{v} \\
&= {}^t\boldsymbol{v}\,{}^tgg\boldsymbol{v} \\
&= {}^t(g\boldsymbol{v})(g\boldsymbol{v}) \\
&= (g\boldsymbol{v}, g\boldsymbol{v}) \\
&= \left\|g\boldsymbol{v}\right\|^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
Q_{g_1} = Q_{g_2} &\Leftrightarrow {}^tg_1g_1 = {}^tg_2g_2 \\
&\Leftrightarrow {}^tg_2^{-1}\,{}^tg_1g_1g_2^{-1} = E_2 \\
&\Leftrightarrow {}^t(g_1g_2^{-1})(g_1g_2^{-1}) = E_2 \\
&\Leftrightarrow g_1g_2^{-1}\text{が直行行列}
\end{aligned}$$

3. Q_gは対称行列なので直行行列 $h({}^thh = E_2)$ を使って対角化できる.Q_gの固有値をμ_1, μ_2とすると

$${}^thQ_gh = {}^th\,{}^tggh = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

$${}^tgg = h\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}{}^th$$

とできる

μ_1, μ_2 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ とすると, ゼロベクトルではない.

$Q_g\boldsymbol{v_1} = \mu_1\boldsymbol{v_1}$ であり,1 より ${}^t\boldsymbol{v_1}Q_g\boldsymbol{v_1} > 0$ だから

$$\begin{aligned}
{}^t\boldsymbol{v_1}Q_g\boldsymbol{v_1} &= {}^t\boldsymbol{v_1}\mu_1\boldsymbol{v_1} = \mu_1{}^t\boldsymbol{v_1}\boldsymbol{v_1} \\
&\Leftrightarrow \mu_1 = \frac{{}^t\boldsymbol{v_1}Q_g\boldsymbol{v_1}}{{}^t\boldsymbol{v_1}\boldsymbol{v_1}} > 0
\end{aligned}$$

同様にして $\mu_2 > 0$.

よって $g' = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu}_2 \end{pmatrix} {}^t h$ とおくと

$$\begin{aligned} Q_{g'} &= {}^t g' g' \\ &= h \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu}_2 \end{pmatrix} {}^t h \\ &= h \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} {}^t h \\ &= Q_g \end{aligned}$$

2 より $gg'^{-1} = k_1$おくと, これは直行行列になる.

$$g = k_1 g' = k_1 \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}_1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu}_2 \end{pmatrix} {}^t h$$

となり $\lambda_1 = \sqrt{\mu}_1, \lambda_2 = \sqrt{\mu}_2, k_2 = {}^t h$ とおけば k_2 も直行行列で, たしかに

$$g = k_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} k_2$$

となる