

担当教員: 松井哲男 クラス: 1年理 I - 11, 17, 24, 30, 32, 37-38, 2年文 I, II, III, 理 I, II, III

1. (自由度2の連成振動) 両側の壁にバネ定数  $k$  のバネで繋がれた質量  $m$  の二つのおもりを、更にバネ定数  $k'$  のバネで一直線に繋いだ系を考える (図1)。この系の1次元的な運動について、次の問いに答えなさい。

- 1) 時刻  $t$  でのそれぞれのおもりの平衡点からの変位を  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  として、それらが従う運動方程式を書きなさい。
- 2) この連成振動の2つの基準モードの基準振動数を求めなさい。
- 3) 上問で得たそれぞれの振動数に対応する基準座標を求めなさい。
- 4) 初期条件を  $x_1(0) = \Delta$ 、 $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$  と置いた時の解  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  を求めなさい。

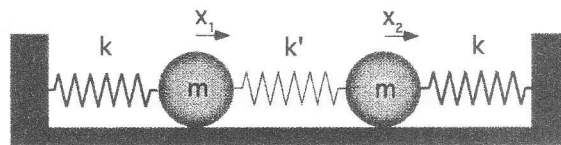


図1: 2連成振動子

2. (連成振動のポテンシャル) 上問の連成振動子のポテンシャル  $V(x_1, x_2)$  は、3つのバネに蓄えられたポテンシャル・エネルギーの総和として与えられる。端の二つのバネとん中のバネの自然長をそれぞれ  $l_0$ 、 $l'_0$ 、また平衡状態での長さをそれぞれ  $l$ 、 $l'$  としたときのポテンシャルが次の式で与えられることを示しなさい。

$$V(x_1, x_2) = k(l - l_0)^2 + \frac{1}{2}k'(l' - l'_0)^2 + \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}k'(x_1 - x_2)^2$$

この結果を使って、運動方程式が平衡状態でのバネの伸びに依らないことを示しなさい。

3. (ポテンシャルと基準座標) この2次元運動のポテンシャルの対称軸は、連成振動の2つの基準座標の方向に一致する。これを、二つのおもりの質量が等しい場合に問2で求めたポテンシャルを使って示しなさい。
4. (一般の連成振動と固有値問題) 一般に自由度2の連成振動の運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

と書ける。この連立微分方程式の解を

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \delta)$$

とおくと、 $\omega^2$  は行列  $\mathbf{L}$  の固有値  $\lambda$  となり、2次方程式

$$\begin{vmatrix} L_{11} - \lambda & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (L_{11} - \lambda)(L_{22} - \lambda) - L_{12}L_{21} = 0$$

の解として求まることを示しなさい。また、定数列ベクトル  $\mathbf{A}$  はその固有ベクトルになる。2つの基準振動数  $\omega$  の値と、それに対応する固有ベクトル  $\mathbf{A}$  の成分比  $A_2/A_1$  を行列  $\mathbf{L}$  の成分を使って表しなさい。