8. （波の透過） 2つの異なる張力（T_1 と T_2）と線密度（σ_1、σ_2）の弦が、$x=0$ で上下に摩擦無しに動く質量の無視できるリングを通して繋がっている。この弦の左側から周期的な右向き進行波

$$f_1(x-v_1) = A\cos(kx-\omega t)$$

を入射したときにできる反射波 $g_1(x+v_1)$ と透過波 $f_2(x+v_2)$ を求めなさい。透過波の持つエネルギー E_t と入射波のエネルギー E_i の比を求めなさい。

9. （弦の強制振動）張力 T、単位長さ当たりの質量が σ の弦が $x=-L$ から $x=L$ まで張られている。左端は自由に動かすことが出来、右端は固定端の境界条件をみたすものとする。この弦の運動について以下の問いに答えなさい。

   1) 弦の左端を外力によって上向きに一定の早さ v で時間 ΔT だけ動かし、その後、逆向きに同じ速さで同じ時間動かした時にできる右向き進行波の波形を求めなさい。
   2) また、この進行波が運ぶエネルギーを計算し、それが外力によってなされた仕事に等しいことを示しなさい。
   3) 右向き進行波が右端にぶつかってから時間 ΔT の後の波形を図示し、そのときの弦の運動エネルギー K とポテンシャル・エネルギー U を計算しなさい。

10. （分散のある場合の波動方程式）変位 $u(t,x)$ に比例した（局所的な）復元力のある媒質中を伝わる波は、弦の運動の方程式を少し変型した次の波動方程式で記述される。（問題2を参照）以下の問に答えなさい。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \omega_0^2 u$$

   1) この方程式の解を $u(t,x)=\exp(ikx-i\omega t)$ とおいて、ω と k のみたすべき関係（分散関係）を導きなさい。
   2) この分散のある媒質中を伝わる波数 k_1 と k_2 をもち、振幅の同じ周期的な右向き進行波を重ね合わせる。

$$u(t,x) = A\cos(k_1x-\omega_1t+\delta_1) + A\cos(k_2x-\omega_2t+\delta_2)$$

   $\Delta k = k_1 - k_2 \ll k_1$ のとき、周期 $\lambda_B = 2\pi/\Delta k$ のうなりが生じ、それが群速度 $v_g = (d\omega/dk)_{k=k_1}$ で伝わることを示しなさい。

11. （3次元の波動方程式）空気中を伝わる音波の方程式は、時刻 t、位置 $\mathbf{r}$ での空気密度を $\rho(t,\mathbf{r})$ とすると、

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = v_s^2\nabla^2\rho \tag{2}$$

と表される。ここで、v_s は音速で、$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$、$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ である。次の2つの関数がこの波動方程式の解となることを示しなさい。

$$\begin{aligned}\rho(t,\mathbf{r}) &= Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm iv_skt}, && \text{（平面波）}\\ \rho(t,\mathbf{r}) &= \frac{A}{r}e^{ik(r\pm v_st)} && \text{（球面波）}\end{aligned}$$