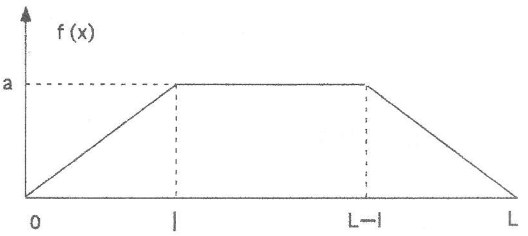
3. (台形関数のフーリエ級数展開) 区間 $(0, L)$ で定義された次の台形関数 $f(x)$ のフーリエ展開係数を求めなさい。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{L}x & \text{if } 0 < x < l \\ \frac{2al}{L} & \text{if } l < x < L-l \\ \frac{2a(L-x)}{L} & \text{if } L-l < x < L \end{cases} \tag{1}$$



$f = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin k_n x$

$k_n L = n\pi$

図 2: 台形関数

4. (弦の振動の特殊解) 両端の固定された長さ L の弦のまん中を高さ a に持ち上げてから離した時の弦の運動の解をフーリエ級数の和で求めなさい。但し、弦の張力を T、単位長さ当たりの質量密度を σ とする。

5. (ダランベールの解) 弦の波動方程式、$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$、の一般解が、連続関数 $f(x)$、$g(x)$ をつかって、

$$u(t, x) = f(x - vt) + g(x + vt),$$

と表せることを示しなさい。また、初期条件が $u(0, x) = U(x)$、$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = V(x)$ の時、解は

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\left[U(x - vt) + U(x + vt)\right] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} dx' V(x')$$

となることを示しなさい。

6. (周期的進行波と定在波) 波長 $\lambda = 2\pi/k$ の正弦関数で表された右向き進行波と左向き進行波を重ね合わせると、

$$u(t, x) = A\sin[k(x - vt)] + A\sin[k(x + vt)] = 2A\sin(kx)\cos(vkt)$$

これは $x = \pm n\lambda/2$ で節（ノード）をもつ定在波となる。また固定端で挟まれた長さ L の弦の振動の一般解を $x = \pm L$ で節をもつ定在波の一部とみなすと、それは周期 $2L$ の進行波の重ね合わせで表される。問題３で得られた解をを進行波を使って表すとどうなるか。

7. (波の反射) 図３のような右進行波が $x = 0$ の自由端に入射したとき、時間の経過とともに波形がどのように変化するか説明しなさい。また、この進行波の中心が $x = 0$ に到達した時に波の持つ運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーを求めなさい。固定端の場合はどうか。

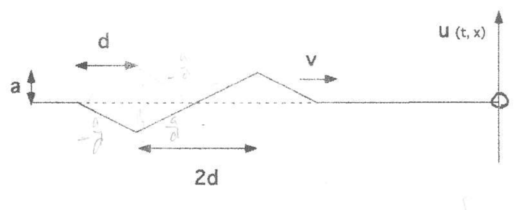


図 3: 波の反射

$\frac{1}{2}\sigma\Delta x\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t}\right)^2$