2011年度 前期課程　　振動・波動論　例題3　　1月12日出題

担当教員: 松井哲男　　クラス：1年理 I - 11, 17, 24, 30, 32, 37-38, 2年文 I, II, III, 理 I, II, III

1/31 [illegible]

1. (弦の振動) 区間 $(0, L)$ で張られた弦の運動を考える。時刻 t、場所 x での弦の横方向の変位を $u(t, x)$ であらすとき、以下の問いに答えなさい。但し、弦の張力を T とし、単位長さ当たり σ の一様な質量密度分布を仮定する。

   1) 区間 $(x, x + \Delta x)$ の弦の要素に働く力を求め、この要素の運動方程式から $u(t, x)$ の従う波動方程式
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
   を導きなさい。

   2) 波動方程式の基準振動解を $u(t, x) = A\sin(kx + \phi)\cos(\omega t + \delta)$ とおいたとき、k と ω のみたす条件を求めなさい。

   3) $x = 0$ で固定端、$x = L$ で自由端の境界条件 $u(t, 0) = \cancel{u(t, L)} = 0$ を課したときの、ϕ と k の取りうる値を求めなさい。
   $\frac{\partial}{\partial x}u(t, L) = 0$

   4) このとき、振動数が小さい基準振動を3つ図示しなさい。

2. (初期条件とフーリエ分解) 区間 $-L < x < L$ で定義された関数 $f(x)$ を、
$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x)$$
とフーリエ級数分解したとき、フーリエ展開係数は
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx f(x)\cos(k_n x) \qquad n = 0, 1, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx f(x)\sin(k_n x) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

で与えられる。両端の固定された長さ $2L$ の弦の初期条件を図1のように与えた時の弦の運動の解をフーリエ級数の和で求めなさい。但し、弦の張力を T、単位長さ当たりの質量密度を σ とし、弦は初め静止しているとする。必要であれば、次の不定積分の公式を用いなさい:
$$\int dx x\sin(kx) = -\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)$$

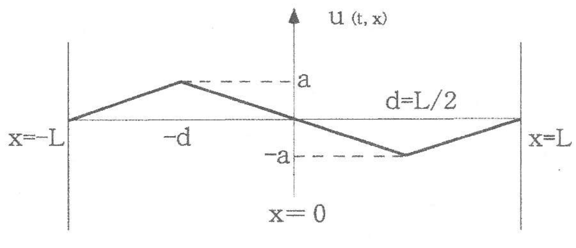

図1: 弦の初期条件