2011 年度 前期課程　　**振動・波動論　例題 1**　　10 月 20 日出題

担当教員: 松井哲男　　クラス：1 年理 I - 11, 17, 24, 30, 32, 37-38, 2 年文 I, II, III, 理 I, II, III

3問内径 11/10 まで 2,5,7,9

1. （円運動と調和振動）質量 m の質点が半径 R の円周上を等角速度 ω で円運動している。この運動を記述する運動方程式の x 方向、y 方向の射影が、それぞれ角振動数 ω の調和振動子の運動方程式になることを示しなさい。[ヒント：円運動する質点には中心に向かって力 $F_r = mr\omega^2$ が働いている。この力の x 方向、y 方向の成分によってそれぞれの方向の加速が起こる。]

2. （指数関数表示）Euler（オイラー）の関係式、$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ より、三角関数は

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right), \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

と表される。この関係式を用いて、次の公式を導きなさい。

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2, \tag{1}$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2, \tag{2}$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\left(\cos 3\theta + 3\cos\theta\right), \tag{3}$$

$$\sin^3\theta = \frac{1}{4}\left(-\sin 3\theta + 3\sin\theta\right). \tag{4}$$

3. （調和振動子の一般解）調和振動子の運動方程式, $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -\omega^2 x$、の一般解、$x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$ は、複素指数関数を使って

$$x(t) = C_+ e^{\mathrm{i}\omega t} + C_- e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5}$$

と表すことができる。C_+、C_- を A、δ を使って表しなさい。

4. （調和振動子のエネルギー）質量 m の質点が調和振動子のポテンシャル $V(x) = kr^2/2$ の中を振幅 A で運動している。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの長時間平均を求めそれらが等しいことを示せ。

5. （ポテンシャルと調和近似）質量 m の質点の、ポテンシャル $V(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4$ の中での運動を考える。このポテンシャルの極小値を与える x を求めなさい。極小値 $x = x_0(> 0)$ の周りでの微小振動を考える。この振動を調和振動で近似した時の固有振動数 ω を求めなさい。但し、$a, b > 0$ とする。

6. （単振り子）長さ l の紐で釣り下げられたおもりの運動方程式が

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{6}$$

となることを示し、θ が小さいときの微小振動の振動数を求めなさい。ここで、θ は紐が垂線と成す角である。

7. （地球縦貫トンネル）地球を密度一様の球だと考える。地球の表面のある地点から、地球の中心を通って反対側に抜ける真直ぐな穴を掘ったとする。この穴にある物体を落とすと調和振動する。その振動数を重力定数 G、地球の質量 M と半径 R を使って表わしなさい。$R = 6400$ km、また地表での重力加速度 $g = GM/R^2 = 9.8\mathrm{m/s^2}$ を用いて、この調和振動の周期 $T = 2\pi/\omega$ を計算しなさい。また、空気抵抗がないとき、地表すれすれを周回する人工衛星の回転周期がこの調和振動の周期に等しくなることを示しなさい。地表のある場所から別の場所（例えば東京とニューヨーク）まで真直ぐなトンネルをほり、その中を摩擦なしで重力の力のみで動く列車を走らせた時、この列車の運動はやはり調和振動となる。その周期はどうなるか？[ヒント：逆２乗則に従う重力に対してガウスの法則をつかうと、地球の重心から r の距離にある質量 m の質点に働く重力は、半径 r の球の内側にある物質とおなじ質量をもった質点が地球の中心からこの物体に及ぼす重力に等しい。また、軌道半径が R の人工衛星の角速度 ω は $m\omega^2 R = GmM/R^2$ により決まる。]