数学II 2回目宿題　　$^{11}/_{22}$ まで

$g \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して, $Q_g := g^* g$ と定める.

1

Q_g はエルミート行列になり, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ($z_1, z_2, \cdots, z_n$ はいずれも複素数.) であれば,

$(\bar{z_1}, \bar{z_2}, \cdots, \bar{z_n})\, Q_g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} > 0$ となることを証明せよ.

2

$Q_{g_1} = Q_{g_2}$ であることと, $g_1 {g_2}^{-1}$ がユニタリ行列であることが同値な条件であることを証明せよ.

3

任意の $g \in GL(n, \mathbb{C})$ に対して, あるユニタリ行列 k_1, k_2 と n 次対角行列

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ が存在して, $g = k_1 D k_2$ と分解できることを証明せよ.

1. $Q_g = g^* g$ がエルミート行列 $\Leftrightarrow$ $Q_g^* = Q_g$ であって

$Q_g^* = (g^* g)^* = g^* (g^*)^* = g^* g = Q_g$

$v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ とすると $(\bar{z_1}, \bar{z_2}, \cdots, \bar{z_n})\, Q_g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = v^* g^* g v = (gv)^*(gv) = (gv, gv) = \|gv\|^2 > 0$ ($\because v \neq 0$)

(エルミート内積)

2. $Q_{g_1} = Q_{g_2} \Leftrightarrow g_1^* g_1 = g_2^* g_2 \Leftrightarrow g_2^{*-1} g_1^* g_1 g_2^{-1} = E_n \Leftrightarrow (g_1 g_2^{-1})^* (g_1 g_2^{-1}) = E_n \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1}$ がユニタリ行列

3. エルミート行列はユニタリ行列 h で対角化可能なので $h^* Q_g h = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots\ \mu_n \end{pmatrix}$ とできる

μ_i に対する固有ベクトル v_i として $Q_g v_i = \mu_i v_i$　$v_i^* Q_g v_i = v_i^*(\mu_i v_i) = \mu_i (v_i^* v_i)$

$\mu_i = \dfrac{v_i^* Q_g v_i}{v_i^* v_i} > 0$　($\because v_i^* Q_g v_i > 0$, $v_i^* v_i > 0$) ($\forall i$)

$Q_g = h \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} h^*$ であって $g' = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} h^*$ とすると

$Q_{g'} = h \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} h^* = h \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} h^* = Q_g$ なので 2 より $g g'^{-1} = k_1$ はユニタリ行列

よって $g = k_1 g' = k_1 \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\mu_n} \end{pmatrix} h^*$, $\sqrt{\mu_i} = \lambda_i$, $k_2 = h^*$ とするとたしかに条件をみたす ∎