1. Q_gがエルミート行列 $\Leftrightarrow Q_g^* = Q_g$ 　であり

$$Q_g^* = (g^*g)^* = g^*(g^*)^* = g^*g = Q_g$$

より Q_g はエルミート行列

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned}(\bar{z_1}, \bar{z_2}, \cdots, \bar{z_n}) Q_g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} &= \boldsymbol{v}^* Q_g \boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{v}^* g^* g \boldsymbol{v} \\ &= (g\boldsymbol{v})^*(g\boldsymbol{v}) \\ &= (g\boldsymbol{v}, g\boldsymbol{v}) \\ &= \|g\boldsymbol{v}\|^2 \\ &> 0\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Q_{g_1} = Q_{g_2} &\Leftrightarrow g_1^* g_1 = g_2^* g_2 \\ &\Leftrightarrow (g_2^*)^{-1} g_1^* g_1 g_2^{-1} = E_n \\ &\Leftrightarrow (g_1 g_2^{-1})^* (g_1 g_2^{-1}) = E_n \\ &\Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \text{がユニタリ行列} \end{aligned}$$

3. Q_gはエルミート行列なのでユニタリ行列 $h(h^*h = E_n)$ を使って対角化できる.Q_gの固有値を$\mu_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ とすると

$$h^* Q_g h = h^* g^* g h = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

$$g^* g = h \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} h^*$$

とできる

μ_i に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ とすると, ゼロベクトルではない.

$Q_g \boldsymbol{v_i} = \mu_i \boldsymbol{v_i}$ であり,1 より $\boldsymbol{v_i}^* Q_g \boldsymbol{v_i} > 0$ だから

$$\boldsymbol{v_i^*} Q_g \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{v_i^*} \mu_i \boldsymbol{v_i} = \mu_i \boldsymbol{v_i^*} \boldsymbol{v_i}$$
$$\Leftrightarrow \mu_i = \frac{\boldsymbol{v_i^*} Q_g \boldsymbol{v_i}}{\boldsymbol{v_i^*} \boldsymbol{v_i}} > 0$$

よって $g' = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\mu}_n \end{pmatrix} h^*$ とおくと

$$\begin{aligned} Q_{g'} &= g'^* g' \\ &= h \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\mu}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\mu}_n \end{pmatrix} h^* \\ &= h \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} h^* \\ &= Q_g \end{aligned}$$

2 より $gg'^{-1} = k_1$とおくと, これはユニタリ行列になる.

$$g = k_1 g' = k_1 \begin{pmatrix} \sqrt{\mu}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\mu}_n \end{pmatrix} h^*$$

となり $\lambda_i = \sqrt{\mu}_i, k_2 = h^*$ とおけば k_2 もユニタリ行列で, たしかに

$$g = k_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} k_2$$

となる