2011/03/23 柚井

Bayesian Networks and Decision Graphs輪講

**1.2 確率理論の基礎**

・ある実験を行ったときに, 起こり得る全ての結果の集合をSample Space(*S*,標本空間)という。

例1．サイコロの場合*S*={1,2,3,4,5,6}

例2．サッカーの場合*S*={yes,no}

・標本空間の部分集合をEvent（事象）という.

例．サイコロの場合*A*={3,4,5,6}

・確率P(*A*)：不確かさの度合い

・確率は以下の3つの公理に従っていなければならない。

Axiom 1 P(*S*)=1

Axiom 2 P(*A*)≧0

Axiom3 

Axiom3の例：

サイコロを1回ふるとき、3の目が出る事象を*B*、2か4か6の目が出る事象を*A*とすると、*A*と*B*は互いに素の事象であり、これらの2つの事象のうち1つが起こる確率は、



*A*

*B*

*S*

Fig.1.1(a) the two events A and B are disjoint

　一方、事象Aと事象Bが互いに素でない(Fig.1.1(b)参照)とき、2つの事象のうちの1つが起こる確率は、



ここで*A*⋂*B*は*A*と*B*の共通部分であり*A*と*B*が同時に起こる事象のことである。

*B*

*A*

*S*

Fig.1.1(b) A⋂B≠0(空集合の記号)

　トランプを例にして考える。

　事象*A*をスペードを引く、事象*B*をキングを引くとすると*A*と*B*の共通部分はスペードのキングを引くことである。その確率は、



**1.2.1 Conditional Probabilities(条件付き確率)**

条件付き確率：事象*B*が与えられたときに事象*A*が起こる確率。P(*A*|*B*)と表記される。



例：サイコロを1回ふるとき、4の目が出る事象を*A*、2か4か6の目が出る事象を*B*とする。2か4か6の目が出たことがわかっているとき、出た目が4である確率は、



また、もう1つ事象を加えた場合の条件付き確率は以下のように定義される。



**1.2.2 Probability Calculus**

Theorem 1.1 (The fundamental rule)

P(A|B)P(B)=P(A⋂B)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(1.1)

The fundamental ruleによってBが与えられたときのAが起こる確率とBの確率を知っているときに、AとBが同時に起こる確率を求めることができる。

ほかの事象Cを条件付けることによって、The fundamental ruleは以下のように書ける。

P(A|B⋂C)P(B|C)=P(A⋂B|C)

P(A⋂B)=P(B⋂A)なので、P(A|B)P(B)=P(A⋂B)=P(B|A)P(A)である。

よって、ベイズの法則が以下のように導かれる。

Theorem 1.2 (Bayes’ rule)



ベイズの法則は、事象Bについての情報を与えられたときの事象Aについての信念を更新する方法である。このため、一般的にP(A)は事前確率、P(A|B)は事後確率、P(B|A)は尤度と呼ばれる。

　状況Cでのベイズの法則は以下のようになる。



* 1. 我々は2つの病気a1とa2を持っているとし、両方とも兆候bの原因となりえるとする。また、P(b|a1)=0.9、P(b|a2)=0.3であり、a1とa2の事前確率は等しいとする（P(a1)=P(a2)）。

今、bが起きたとすると、ベイズの法則より以下が導かれる。





　　　　　たとえ事後確率が計算できないとしても、以上よりP(a1|b)はP(a2|b)の3倍であることがわかる。

　　　　　更に、もし、a1とa2だけがbの原因であるということがわかったらP(a1|b)+P(a2|b)=1であるので以下を得る（ただしa1とa2が同時に起きる確率は0と仮定している）。



　　　　　よって、

　

**1.2.3 Conditional Independence(条件付き独立)**

時々、事象Bについての情報は事象Aが起こることについての信念を変えない。この場合をAとBは独立であると言う。

Definition 1.1 (Independence)

もしP(A|B)=P(A)なら、AとBは独立である。

例：　2つのサイコロを投げるとき、１つのサイコロが2を出したとしても、このことはもう１つのサイコロが何の目を出すかについて影響しない。

　　この概念はsymmetricである。つまりもしAがBについて独立なら、BはAについて独立である。



　　ただし、これはP(A)>0のときに成り立つ。もしP(A)=0ならば計算は妥当でない。しかしながら、我々にとってこのことはあまり問題でない。なぜならもしAが不可能なら、それについて考える意味がないからである。

　　もし、２つのイベントが独立なら、the fundamental ruleは以下のように書き換えられる。

P(A⋂B)=P(A|B)P(B)=P(A)・P(B)

　　事象Cについてすでに知っていて事象Bについての情報が事象Aについての信念を変えないなら、AとBはCを与えられた条件で独立である。

Definition 1.2 (Conditional independence)

もし、P(A|B⋂C)=P(A|C)なら、事象Aと事象Bは事象Cのもと条件付き独立である。

この概念もsymmetricである。つまり、もし事象Cのもと事象Aが事象Bについて独立なら、事象Bは事象Cのもと事象Aについて独立である。



　　更に、２つの事象が条件付き独立なら、両方の事象が起きる確率を計算する際に上述のようなmultiplication ruleが使える。

P(A⋂B|C)=P(A|C)・P(B|C)

　　２つの事象が条件付き独立のとき、C=0（空集合の記号）でないという特別なケースである。