統計学　演習問題

1. 一組のトランプ 52 枚から 13 枚を引くとき，エースを引く回数の期待値はいくらか.

2. ある製品は A，B，C，D の 4 工場で作られていて，各工場での生産量の比は 3 : 3 : 4 : 5 である.
またそれぞれの工場における不良品の割合は 3 %，4 %，3 %，7 % であるという．1 つ不良品が出たとき，
それが A，B，C，D の製品である確率はそれぞれいくらか．ベイズの定理を使って求めよ.

3. 確率変数 X の期待値が -3 で分散が 25，確率変数 Y の期待値が -4 で分散が 16 とし，X と Y は独立であるとする．このとき次の値をそれぞれ求めよ.

(1) $E(2X-3)$, $V(-X+2)$, $E(X^2)$, $E(-2X^2)$

(2) $E(X-Y)$, $V(X-Y)$, $E(3X-2Y+1)$, $V(3X-2Y+1)$

(3) $E(XY)$, $E(X^2Y^2)$, $E(-2XY+6)$

4. 確率変数 X が値 -1，0，1 をそれぞれ 1/8, 3/4, 1/8 の確率でとる.
$P(|X| \geqq 1) = 1/4$ を示し，チェビシェフの不等式と比べよ.

5. $m_X(t)$, $-c < t < c$ を確率変数 X の積率母関数とする.

$P(X \geq a) \leq e^{-at}m_X(t) \quad (0 < t < c)$

$P(X \leq a) \leq e^{-at}m_X(t) \quad (-c < t < 0)$

が成り立つことを示せ.

6. 酔っ払いが居酒屋を出発して，次のような規則で一本道を東西に歩く．1/2 ずつの確率で東西どちらかへ歩き，5m 進むと立ち止り，その後同じことを繰り返す．その酔っ払いが 40m 歩いたとき，元の居酒屋に戻ってくる確率はいくらか.

7. あるレンタカーの営業所には 3 台の車があり，1 日単位で貸し出す．レンタカーの需要は 1 日平均 2 台でポアソン分布にしたがうとする．1 台を 1 日貸すと 7,000 円収入が上がる．一方，営業所全体の経費として 1 日当たり 8,000 円かかるという．その営業所全体での 1 日の利益額の期待値を求めよ.

8. ある生命保険会社は，1 年間の死亡率が 1/25 である年代の 21,600 人と保険契約している．支払金の準備の都合もあるので，1 年間に死亡する人数 x について次のようなことを知りたがっている．どのように答えたらよいだろうか．

（イ） 1 年間に 900 人以上が死亡する確率 （ つまり $P(x \geqq 900)$ ）

（ロ） $P(x \geqq a) = 0.01$ となるような人数 a の値

9. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の積率母関数を求め，そこから期待値と分散を導出せよ．

10. 確率変数 X，Y の同時密度関数が $f(x,y) = cx^3 \exp\{-x(1+y)\}$ $(0 < x, y < \infty)$ であるとき，次の問に答えよ．

(1) 定数 c の値を求めよ．

(2) X, Y の周辺密度関数 $f_1(x)$，$f_2(y)$ を求めよ．

(3) X, Y の平均，分散はいくらか．また，X と Y の相関係数はいくらか．

11. 2 つのつぼ A, B の中に 3 個のボールを投げ入れる．つぼ A の中に入ったボールの数を X，ボールの入っているつぼの数を Y とするとき，X, Y の同時確率分布を求めて，X と Y とは無相関であるが，独立ではないことを示せ．

12. 2 つの物体 A, B の重さ m_A, m_B を測りたい．A, B それぞれを天秤の片側にのせて測る方法（I）と，まず一方に A, B 両方をのせて重さの和を測り，また天秤の両側にのせて差を測りそこから算出する方法 (II) がある．I，II のどちらの方が優れた方法か．ただし，天秤の測定誤差の分散は常に σ^2 とする．

13. X, Y がそれぞれ平均 λ, μ のポアソン分布に従う独立な確率変数であるとすると，$X+Y$ は平均 λ, μ のポアソン分布に従うことを示せ．

ヒント ：

$$P(X+Y=n) = \sum_{r=0}^{n} P(X=r)P(Y=n-r)$$

に注意すれば右辺は二項定理を使って計算できる．

14. 知能指数 IQ は正規分布 $N(100,\ 15^2)$ に従う．IQ が 150 以上の人は全体の何パーセントを占めるか？

15. 中心極限定理を証明せよ．

16. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う無作為標本とする．そのとき，標本平均と標本分散 ：

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad {S_n}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_n}\right)^2$$

の平均と分散を求めよ．

17. カイ二乗分布の概略について説明せよ．

18. ある都市で n 人の有権者に 1 つの政策に対する意見を聞いたところ，r 人が賛成であると答えた．このとき有権者全体の中での賛成の人の割合 p に対する最尤推定値は r/n であることを示せ．

19. 1 時間ごとの受信電話数を記録したところ，

4，3，5，4，8，2，5，9，3，5

であった．ポアソン母集団 $Po(\lambda)$ を仮定して，λ の信頼係数 99 %の信頼区間を求めよ．

20. ある全国模試を受けた男子学生の中から 200 人を無作為に選んだところ，その平均は 620 点で標準偏差は 110 点であった．同じ試験を受けた女子学生の中から 180 人を無作為に選んだところ，その平均は 700 点で，標準偏差は 90 点であった．男子と女子の全国平均の差の 95 %近似信頼区間を求めよ．

21. ある製パン会社では，クリームパンの重量を平均 185.0g，標準偏差 1.2g で管理して製造している．今日の製品の中から 25 個を無作為に選んで重量を測定したところ，その平均（標本平均）は 184.1g だった．本日のクリームパンの製造工程に異常があったと言えるか．有意水準 5 %で検定（両側検定）せよ．ただし，クリームパンの重量の分布は正規分布に従うものとする．

22. あるメーカーのお菓子は内容量が 65g と記載されているが，実際には表記より少ないのではないかと疑われている．そこで $n = 30$ 個の標本を取って調べてみたところ，内容量の標本平均値は $x = 63.5$g，不変分散値 $s^2 = 4.0$ であった．このお菓子の内容量は 65g よりも少ないと言えるかどうかを，有意水準 1 %で仮説検定せよ．

23. ある商品の知名度は、従来 18 %であった．この商品のテレビでの CM 回数を増やした 1 ヶ月後，無作為に選んだ 4100 人に対して，この商品を知っているかどうか尋ねたところ，820 人が知っていると回答した．この商品の知名度は，テレビの CM 回数の増加によって，従来よりも向上したと言えるか．有意水準 5 %で検定（右片側検定）せよ．

24. 下の表は，女子大生の 1 日のカロリー摂取量を，自宅生と自宅外生に分けて調査した結果である．この調査結果から，自宅生は自宅外生より，1 日のカロリー摂取量が多いと言えるだろうか．有意水準 1 %で検定せよ．

	自宅生	自宅外生
標本の大きさ	400 人	400 人
標本平均	1824 kcal	1815 kcal
標本標準偏差	54 kcal	72 kcal