問 1.

$$\frac{3x^2-3x-9}{(x+2)(x+3)(x-1)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

両辺に $(x+2)(x+3)(x-1)^2$ をかけて,

$$3x^2-3x-9 = a(x+3)(x-1)^2 + b(x+2)(x-1)^2 + c(x+2)(x+3)(x-1) + d(x+2)(x+3)$$

ただし, $x \neq 1, -2, -3$. しかし, これが $1, -2, -3$ を除く全ての x について成立するには, $x = 1, -2, -3$ でも成立することが必要.
$x = -2$ を代入して,

$$9 = 9a \iff a = 1$$

$x = -3$ を代入して,

$$27 = -16b \iff b = -\frac{27}{16}$$

$x = 1$ を代入して,

$$-9 = 12d \iff d = -\frac{3}{4}$$

両辺の 3 次の項を比較して,

$$0 = a + b + c \iff c = \frac{11}{16}$$

以上より,

$$\boldsymbol{a = 1, b = -\frac{27}{16}, c = \frac{11}{16}, d = -\frac{3}{4}}$$

コメント 上記の解答に納得がいかなければ係数比較でも解決する.

問 2.

$e^x = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ とかけたとする ($a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$). $e^x \equiv 0$ ではないのこれでよい. すると,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \left(a_n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}} \right) = a_n$$

ところが, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

これは $a_n \neq 0$ に矛盾. ゆえに, e^x は x の多項式では表せない.
$\sin x = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ とかけたとする ($a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$). すると,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \left(a_n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}} \right) = a_n$$

ところが, $\sin x$ は有界なので,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x^n} = 0$$

これは $a_n \neq 0$ に矛盾. ゆえに, $\sin x$ は x の多項式では表せない.
$e^x = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ とかけたとする ($a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$). 両辺の $(n+1)$ 階微分を取ると,

$$e^x = 0$$

これは明らかに矛盾. ゆえに, e^x は x の多項式では表せない.
$\sin x = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ とかけたとする ($a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$). 両辺の $(n+1)$ 階微分を取ると,

$$\sin x = 0$$

これは明らかに矛盾. ゆえに, $\sin x$ は x の多項式では表せない.

$\sin x = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ とかけたとする ($a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$). $\sin x = 0$ は少なくとも $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$ の $(n+1)$ 個の相違なる実数解を持つが, $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ は高々 n 個の相違なる実数解しか持たず, 矛盾. ゆえに, $\sin x$ は x の多項式では表せない.

コメント いろいろな方法が考えられる. 上で挙げたものの他にもまだあると思う.

問 3.

$\{a_n\}$ が 0 に収束するので, 正の実数 ε に対してある N が存在して,

$$n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

となる. $|a_i|$ $(1 \leq i \leq N)$ の最大値を M とする. $n > N$ のとき,

$$\begin{aligned}
|b_n| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n}{n} \right| \\
&\leq \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_N| + |a_{N+1}| + \cdots + |a_n|}{n} \\
&< \frac{NM + (n-N)\varepsilon}{n} \\
&= \varepsilon + \frac{N(M-\varepsilon)}{n}
\end{aligned}$$

ここで, $n > \frac{N(M-\varepsilon)}{\varepsilon}$ とすれば,

$$\begin{aligned}
|b_n| &< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon
\end{aligned}$$

ゆえに, $\{b_n\}$ も 0 に収束する.

コメント 数学 IA 演習にもあった問題である. そちらも参考にするとよい.

問 4.

b_n は単調増加列で,

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&\leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

より, 上に有界. よって, b_n は収束する. 次に,

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{n} + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot \frac{1}{n^2} + {}_n\mathrm{C}_3 \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \cdot \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&= b_n \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

よって, a_n は上に有界. さらに,

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

について, それぞれの $\dfrac{1}{k!}$ $(1 \leq k \leq n)$ の係数は a_n よりも a_{n+1} の方が大きく, 項の数も a_{n+1} の方が一つ多いので,

$$a_n < a_{n+1}$$

よって, a_n も収束する. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ を示す. $a_n \leq b_n$ なので, $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ である. 今, $n > m$ として,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \end{aligned}$$

$n \to \infty$ として,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &\geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} \\ &= b_m \\ \therefore \lim_{n\to\infty} a_n &\geq \lim_{n\to\infty} b_n \end{aligned}$$

よって, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となる.

コメント 過去の期末試験では 2/2 の割合で出題されているので今回も出題されるかもしれない. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ の証明は少し技巧的なのでしっかり抑えておくこと.

問 5.

$$\text{(1)}\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$
$$\text{(2)}\ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

(1) については, 各項の絶対値が 0 に単調に収束する交代級数なので, 収束する. (2) について, 初めの $3n$ 項の和を S_n として,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4i-3}} + \frac{1}{\sqrt{4i-1}} - \frac{1}{\sqrt{2i}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{3}{i}}} + \frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{i}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}\left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$ は発散するので S_n も発散. よって, (2) の級数は発散.

コメント (1) で用いた定理は重要なのでしっかり確認しておくこと.

> 交代級数 $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^n a_i (a_i \geq 0)$ は, a_i が 0 に単調に収束する, すなわち $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のとき, 収束する.

(2) は, 各項の大きさを大雑把に $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ で計ってみると解決する. 級数の収束判定に便利な定理をいくつか挙げる.

級数 $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ に対して, $T_n = \sum_{i=0}^{n} b_i$ が優級数であるとは, 任意の k について $|a_i| \leq b_i$ が成立することを言う. S_n の優級数 T_n が収束するとき, S_n も収束する. 逆に, S_n が発散するとき, その優級数 T_n も発散.

特に, $b_i = |a_i|$ とすれば, T_n は S_n の優級数となる.

級数 $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ は, $\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ が収束すれば (このことを S_n は絶対収束するという), S_n も収束する.

絶対収束はしないが収束はすることを "条件収束する" という. 条件収束する級数は, 各項を適当に並び替えることによっていかなる値にも収束させることができ, あるいは正負の無限大に発散させることもできる. この問題がその一例となっている. (1) の級数は収束するが条件収束であるので, (2) のように並び替えることで発散させることができるのである (絶対収束ではこのようなことは起こらない). その証明で,

調和級数 $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ は発散する.

を用いた. このことから, 級数 $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^p}$ は $p \leq 1$ のとき調和級数の優級数となり, 発散することがわかる. 実は, $p > 1$ のときは収束する.

級数 $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ は, $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ であれば収束し, $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ であれば発散する.

級数 $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ は, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ であれば収束し, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ であれば発散する.

問 6.

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ のとき $f(nt) = nf(t)$ であることを示す. 与えられた式で $x = y = 0$ として,

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

よって, $f(0) = 0$ となり, $n = 0$ のときは成立. $n = k$ のとき成立すると仮定して, 与えられた式で $x = kt, y = t$ として,

$$f((k+1)t) = f(kt) + f(t) = kf(t) + f(t) = (k+1)f(t)$$

よって, $n = k + 1$ でも成立. よって, 数学的帰納法より, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ のとき $f(nt) = nf(t)$. また, 与えられた式で $y = -x$ として,

$$f(x) + f(-x) = f(x - x) = f(0) = 0$$

よって, $f(-x) = -f(x)$. ゆえに, $n \in \mathbb{Z}$ のとき $f(nt) = nf(t)$ が成立. $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}$ として,

$$p \cdot f\left(\frac{q}{p}\right) = f\left(p \cdot \frac{q}{p}\right) = f(q) = qf(1)$$
$$\therefore f\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{q}{p} f(1)$$

よって, $t \in \mathbb{Q}$ のとき $f(t) = tf(1)$ が成立. $t \in \mathbb{R}$ のとき, t に収束する有理数列 t_n をとれば,$f(x)$ の連続性より,

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} t_n \cdot f(1) = tf(1)$$

よって, 題意を満たす関数は $f(x) = ax(a$ は定数$)$ に限る. また, このとき条件を満たすことは明らか.
コメント 有名な問題で, やり方はほぼ決まっている.

問 7.

(a) 二項定理の拡張.

$$(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{6}x^3 + \cdots$$
$$= \boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)}{n!} x^n}$$

(b) まず,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \cdots$$

両辺を 0 から t で積分して,

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6} + \cdots$$

$t = x^2$ として,

$$\begin{aligned}\log\left(1+x^2\right) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{12}}{6} + \cdots \\ &= \boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^{2n}}{n}}\end{aligned}$$

(c)$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!}$ なので,

$$\boldsymbol{\sin^2 x = 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n} x^{2n}}{(2n+2)!}}$$

(d)$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ とする.

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots$$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$ として,

$$1 = f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = a_0 + \left(\frac{a_0}{2!} + a_1\right)x + \left(\frac{a_0}{3!} + \frac{a_1}{2!} + a_2\right)x^2 + \left(\frac{a_0}{4!} + \frac{a_1}{3!} + \frac{a_2}{2!} + a_3\right)x^3 + \left(\frac{a_0}{5!} + \frac{a_1}{4!} + \frac{a_2}{3!} + \frac{a_3}{2!} + a_4\right)x^4 + \cdots$$

$$\therefore a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{12}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{1}{720}$$

以上より,

$$\boldsymbol{\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots}$$

コメント $e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^a, \dfrac{1}{1+x}, \log(1+x)$ などは覚えてしまおう. あとは, 微分や積分, 和, 差, 積, 商, 合成関数によって, 大抵のべき級数展開は求まるはずである. この問題では不要だが, 先にあげた関数のべき級数展開は収束半径も一緒に覚えるとよ

い. 少しまとめると, $a \notin \mathbb{Z}$ とし, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ の収束半径を $r_f, r_g (r_f \geq r_g)$ として,

					収束半径
e^x	$=$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	∞
$\sin x$	$=$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞
$\cos x$	$=$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	∞
$(1+x)^a$	$=$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \cdots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} {}_a\mathrm{C}_n x^n$	1
$\frac{1}{1+x}$	$=$	$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	1
$\log(1+x)$	$=$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$=$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$	1
$f(x) \pm g(x)$	$=$	$(p_0 \pm q_0) + (p_1 \pm q_1)x + (p_2 \pm q_2)x^2 + \cdots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} (p_n \pm q_n) x^n$	r_g以上
$f(x)g(x)$	$=$	$p_0 q_0 + (p_0 q_1 + p_1 q_0)x + (p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0)x^2 + \cdots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} p_n q_{m-n} \right) x^n$	r_g以上
$f'(x)$	$=$	$p_1 + 2p_2 x + 3p_3 x^2 + \cdots$	$=$	$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n x^{n-1}$	r_g
$\int_0^x f(x)dx$	$=$	$p_0 x + \frac{p_1 x^2}{2} + \frac{p_2 x^3}{3} + \frac{p_3 x^4}{4} + \cdots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n x^{n+1}}{n+1}$	r_g

商, 合成関数については面倒なので割愛する.

問 8.

(a)

$$f(x) = x \cdot \left(1 + x^{50} + x^{100} + x^{150} + \cdots\right) = x + x^{51} + x^{101} + x^{151} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ゆえに,

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = 0, \frac{f^{(101)}(0)}{101!} = 1$$
$$\boldsymbol{f^{(100)}(0) = 0, f^{(101)}(0) = 101!}$$

(b)

$$f(x) = \left(x^{100} - \frac{x^{300}}{3!} + \cdots\right) \cdot \left(1 - x + x^2 + \cdots\right) = x^{100} - x^{101} + x^{102} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ゆえに,

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = 1, \frac{f^{(101)}(0)}{101!} = -1 \boldsymbol{f^{(100)}(0) = 100!, f^{(101)}(0) = -101!}$$

コメント なぜかこの問題は過去問でよく出題される. 抑えておこう.

問 9.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

を考える. 収束半径は,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

より, 0. ゆえに, $x \neq 0$ で発散. $x = 0$ では 1 に収束. あるいは, $x \neq 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} n!x^n = +\infty$ なので発散, といってもよい.

コメント 他にもあるだろうが有名な例を挙げておいた. 収束半径が 0 となる級数を探せばよい.

問 10.

$f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ とする. $g(x) = \frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2}$ が偶関数であることを示す.

$$\begin{aligned} g(x) - g(-x) &= \left(\frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2}\right) - \left(\frac{-x}{e^{-x}-1} - 1 - \frac{x}{2}\right) \\ &= x + \frac{x}{e^x-1} + \frac{xe^x}{1-e^x} \\ &= x + \frac{x(1-e^x)}{e^x-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに $g(x)$ は偶関数で, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$ としたとき, $a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}, a_{2n+1} = 0 (n = 1, 2, \ldots)$ となる.

$$1 = f(x) \cdot \frac{e^x-1}{x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\right)$$

これを展開して x^n の項を比較すると,$(n \geq 1)$

$$\frac{a_n}{n!} + \frac{a_{n-2}}{(n-1)!2!} + \frac{a_{n-2}}{(n-2)!3!} + \cdots + \frac{a_1}{1!n!} + \frac{a_0}{(n+1)!} = 0$$

両辺に $(n+1)!$ をかけて,

$${}_{n+1}\mathrm{C}_n a_n + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1} a_{n-1} + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-2} a_{n-2} + \cdots + {}_{n+1}\mathrm{C}_1 a_1 + {}_{n+1}\mathrm{C}_0 a_0 = 0$$

$n = 2$ として,

$$\begin{aligned} {}_3\mathrm{C}_2 a_2 + {}_3\mathrm{C}_1 a_1 + {}_3\mathrm{C}_0 a_0 &= 0 \\ 3a_2 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 &= 0 \\ \therefore a_2 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$n = 4$ として,$(a_{2n+1} = 0 (n = 1, 2, \ldots)$ に注意)

$$\begin{aligned} {}_5\mathrm{C}_4 a_4 + {}_5\mathrm{C}_2 a_2 + {}_5\mathrm{C}_1 a_1 + {}_5\mathrm{C}_0 a_0 &= 0 \\ 5a_4 + 10 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 1 &= 0 \\ \therefore a_4 &= -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

$n = 6$ として,

$$\begin{aligned} {}_7\mathrm{C}_6 a_6 + {}_7\mathrm{C}_4 a_4 + {}_7\mathrm{C}_2 a_2 + {}_7\mathrm{C}_1 a_1 + {}_7\mathrm{C}_0 a_0 &= 0 \\ 7a_6 + 35 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) + 21 \cdot \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{2} + 1 &= 0 \\ \therefore a_6 &= \frac{1}{42} \end{aligned}$$

$n=8$ として,

$$
\begin{aligned}
{}_9\mathrm{C}_8 a_8 + {}_9\mathrm{C}_6 a_6 + {}_9\mathrm{C}_4 a_4 + {}_9\mathrm{C}_2 a_2 + {}_9\mathrm{C}_1 a_1 + {}_9\mathrm{C}_0 a_0 &= 0 \\
9a_8 + 84 \cdot \frac{1}{42} + 126 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) + 36 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{2} + 1 &= 0 \\
\therefore a_8 &= -\frac{1}{30}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{(-1)^{n+1} B_n x^{2n}}{(2n)!} = \dfrac{a_n x^{2n}}{(2n)!}$ より $B_n = (-1)^{n+1} a_n$ なので,

$$
\boldsymbol{B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}}
$$

コメント 問題文で $g(x)$ が偶関数であることが与えられているので最初の部分は割愛してもよいかもしれない. B_n を求めるのは, 面倒だが難しくはない. Bernoulli 数について補足しておく. 最初の数項は,

$$
B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, B_6 = \frac{691}{2730}, B_7 = \frac{7}{6}, B_8 = \frac{3617}{510}, B_9 = \frac{43867}{798}, B_{10} = \frac{174611}{330}
$$

となる. 実は, $B_n > 0, \displaystyle\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$ である. また, Bernoulli 数は $\dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$ のように定義されることもある. このように定義すると, B_n は漸化式 $B_0 = 1, B_n = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} {}_{n+1}\mathrm{C}_i B_i$ を満たす. 問 13. で示すように, ゼータ関数 $\zeta(x)$ の正の偶数の値に出現する. また, べき乗和 $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$ にも関連し, $S_k(n)$ は

$$
\begin{aligned}
S_{k-1}(n-1) &= \frac{n^k + {}_k\mathrm{C}_1 B_1 n^{k-1} + {}_k\mathrm{C}_2 B_2 n^{k-2} + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1} B_{k-1} n}{k} \\
&= \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} {}_k\mathrm{C}_i B_i n^{k-i} \\
\text{or} \qquad S_k(n) &= \frac{(n+1)^{k+1} + {}_{k+1}\mathrm{C}_1 B_1 n^k + {}_{k+1}\mathrm{C}_2 B_2 n^{k-1} + \cdots + {}_{k+1}\mathrm{C}_k B_k n}{k+1} \\
&= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_i B_i n^{k-i}
\end{aligned}
$$

と表される.

問 11.

まず, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n}$ を示す ($n \in \mathbb{Z}$). $x = \dfrac{1}{h}$ あるいは $x = -\dfrac{1}{h}$ として,

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to+0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{x^2}} \\
&= 0 \\
\lim_{h\to-0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-1)^n x^n}{e^{x^2}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^n} (n \in \mathbb{Z})$. 次に, $x=0$ で $f^{(n)} = 0, x \neq 0$ で $f^{(n)}(x) = \dfrac{(x^2 \text{の } (n-1) \text{ 次式})}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$ を示す. $n=1$ のとき, $x \neq 0$ では

$$
f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}
$$

$x=0$ では

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{h} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって $n=1$ のとき成立. $n=k$ で成立すると仮定する. $n=k+1$ のとき, $x\neq 0$ では

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\cdot\left\{(x^2\text{の }(k-1)\text{ 次式})x^{-3k}e^{-\frac{1}{x^2}}\right\} \\
&= x(x^2\text{の }(k-2)\text{ 次式})x^{-3k}e^{-\frac{1}{x^2}} + (-3k)(x^2\text{の }(k-1)\text{ 次式})x^{-3k-1}e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}(x^2\text{の }(k-1)\text{ 次式})x^{-3k}e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= x^4(x^2\text{の }(k-2)\text{ 次式})x^{-3(k+1)}e^{-\frac{1}{x^2}} + (-3k)x^2(x^2\text{の }(k-1)\text{ 次式})x^{-3(k+1)}e^{-\frac{1}{x^2}} + 2(x^2\text{の }(k-1)\text{ 次式})x^{-3(k+1)}e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= (x^2\text{の }k\text{ 次式})x^{-3(k+1)}e^{-\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}
$$

$x=0$ では, $f^{(k)}(x)=\left(\sum_{i=0}^{k-1}a_ix^{2i}\right)x^{-3k}e^{-\frac{1}{x^2}}$ とおいて,

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f^{(k)}(h)-f^{(k)}(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{k-1}a_i\frac{-e^{\frac{1}{h^2}}}{h^{3k+1-2i}} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\lim_{h\to 0}a_i\frac{-e^{\frac{1}{h^2}}}{h^{3k+1-2i}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって, $n=k+1$ でも成立. 数学的帰納法より, $x=0$ で $f^{(n)}=0$, $x\neq 0$ で $f^{(n)}(x)=\dfrac{(x^2\text{の }(n-1)\text{ 次式})}{x^{3n}}e^{-\frac{1}{x^2}}$ が言えて, $f^{(n)}(0)=0$.
また, $f^{(n+1)}(x)$ が存在するので, $f^{(n)}(x)$ は連続. よって, $f(x)$ は C^∞-関数.

コメント 少し微分してみれば規則性が見えてくる. (x^2の $(n-1)$ 次式) の細かい係数は, 問題にはあまり関係ないので, 拘らない方が良いだろう.

問 12.

(a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos -1}{x^2\cos x} &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\cos x}\frac{1-\cos}{x^2}\right) \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x^2}\log\left(1+\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\right)\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left\{\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\right)^2+\cdots\right\} \\
&= -\frac{1}{6}-\frac{1}{180}x^2+\cdots \\
\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x} &= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

e^x は連続関数なので,

$$
\boldsymbol{\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}}
$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を示す. $x=e^t$ とおいて, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^t}=0$ を示せばよい. $t>0$ では $e^t=1+t+\dfrac{t^2}{2}+\cdots>\dfrac{t^2}{2}$ なので,

$$
0<\frac{t}{e^t}<\frac{2}{t}
$$

よって, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^t}=0$. すると, $t=\log x$ として,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\log x+\log\log x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\log\log x}{\log x}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\log t}{t}}\\&=\mathbf{1}\end{aligned}$$

コメント 期末に出そうな問題なのでしっかりチェックしておこう.

問 13.

$$\begin{aligned}x\cot x&=x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\\&=x\cdot\frac{\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)/2}{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)/2i}\\&=ix\cdot\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}\\&=ix\cdot\left(\frac{2}{e^{2ix}-1}+1\right)\\&=\frac{2ix}{e^{2ix}-1}+\frac{2ix}{2}\end{aligned}$$

ここで, $\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nB_nx^{2n}}{(2n)!}$ なので,

$$x\cot x=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nB_n(2ix)^{2n}}{(2n)!}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_nx^{2n}}{(2n)!} \tag{1}$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{2x^2}{x^2-n^2\pi^2}&=-\frac{2x^2}{n^2\pi^2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}}\\&=-2\frac{x^2}{n^2\pi^2}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\cdots\right)\\&=-2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^m\end{aligned}$$

$\cot x$ の部分分数分解の公式より,

$$\begin{aligned}x\cot x&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^2}{x^2-n^2\pi^2}\\&=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{n^{2m}\pi^{2m}}\\&=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\right)\frac{x^{2m}}{\pi^{2m}}\right\}\\&=1-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}}x^{2m}\end{aligned}$$

(1) と比較して,

$$\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}}=\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}\iff\zeta(2m)=\frac{2^{2n-1}B_n}{(2n)!}\pi^{2m}$$

$m=1,2$ として, $B_1=\frac{1}{6},B_2=\frac{1}{30}$ なので,

$$\boldsymbol{\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\zeta(4)=\frac{\pi^2}{90}}$$

コメント 右辺についてはそれほど難しくないと思われる. 左辺は少し技巧的な変形が必要だが, 思いつかなくとも, $x\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ として,

$$x\cos x = \sin x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

を展開して係数を比べれば $\zeta(2), \zeta(4)$ は求まる.

問 14.

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$$

とおくと, $F(x)$ は $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能, $F(a) = F(b) = 0$ となる. ゆえに, Rolle の定理より, ある $c \in (a,b)$ が存在して,

$$F'(c) = 0 \iff \begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0$$

$h(x) = 1$ とすれば, $h'(c) = 0, h(a) = h(b) = 1$ なので,

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \iff &\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) \\ f(a) & g(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) \\ f(b) & g(b) \end{vmatrix} \\ \iff &f'(c) : g'(c) = (f(a) - f(b)) : (g(a) - g(b)) \end{aligned}$$

これは, Cauchy の平均値の定理である.

コメント 平均値の定理や Cauchy の平均値の定理の証明と同様に, まず $x = a, x = b$ で 0 になる関数を見つけて, Rolle の定理を用いる, という手順を踏む.

問 15.

(a)

$$\boldsymbol{f_x = y\cos(xy), f_y = x\cos(xy)}$$
$$\boldsymbol{f_{xx} = -y^2\sin(xy), f_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy), f_{yy} = -x^2\sin(xy)}$$

(b)

$$\boldsymbol{f_x = -\frac{y}{x^2}, f_y = \frac{1}{x}}$$
$$\boldsymbol{f_{xx} = \frac{2y}{x^3}, f_{xy} = -\frac{1}{x^2}, f_{yy} = 0}$$

(c)

$$\boldsymbol{f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}}$$
$$\boldsymbol{f_{xx} = \frac{2\left(y^2-x^2\right)}{(x^2+y^2)^2}, f_{xy} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{(x^2+y^2)^2}}$$

(d)

$$\boldsymbol{f_x = \frac{1}{x+\sin y}, f_x = \frac{\cos y}{x+\sin y}}$$
$$\boldsymbol{[f_{xx} = -\frac{1}{(x+\sin y)^2}, f_{xy} = -\frac{\cos y}{(x+\sin y)^2}, f_{yy} = -\frac{1+x\sin y}{(x+\sin y)^2}}$$

コメント 微分するだけである. 説明は不要であろう.

問 16.

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha\right)^2+\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha\right)^2\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\sin\alpha\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha\right)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin 2\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}&=\left(-\frac{\partial}{\partial x}\sin\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\cos\alpha\right)\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\alpha\right)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\alpha-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin 2\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\alpha\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

コメント Jacobi 行列を用いて変数を変換するだけである. 特に難しいところもあるまい.

問 17.

$h,k>0$ に対して, $P(a,b)\,,Q(a+h,b)\,,R(a,b+k)\,,S(a+h,b+k)$ とし,

$$\Delta=(f(S)-f(R))-(f(P)-f(Q))=f(P)+f(S)-f(Q)-f(R)$$

とおく.$g(x)=f(x,b+k)-f(x,b)$ として,

$$\Delta=g(a+h)-g(a)$$

$f(x)$ は C^2 級なので, 平均値の定理より, $0<\theta<1$ が存在して,

$$\Delta=hg'(a+\theta h)=h(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a+\theta h,b))$$

再び平均値の定理より, $0<\varphi<1$ が存在して,

$$\Delta=hkf_{xy}(a+\theta h,b+\varphi k)$$

f_{xy} は連続なので,

$$\lim_{h\to0,k\to0}\frac{\Delta}{hk}=f_{xy}(a,b)$$

同様にして,

$$\lim_{h\to0,k\to0}\frac{\Delta}{hk}=f_{yx}(a,b)$$

ゆえに,

$$f_{xx}(x,y)=f_{yx}(x,y)$$

コメント 上記の P,Q,R,S を用いれば, $f_x(a,b)$ は $\dfrac{f(Q)-f(P)}{h}$ で, $f_x(a,b+k)$ は $\dfrac{f(S)-f(R)}{h}$ は近似できる. $f_xy(a,b)$ は $\dfrac{f_x(a,b+k)-f_x(a,b)}{k}$ で近似できるので, 結局, $f_xy(a,b)\approx\dfrac{f(P)+f(S)-f(Q)-f(R)}{hk}$ となる. これが Δ の由来である. あとは, “近似” を平均値の定理で厳密に言い表してやればいい.

問 18.

$$\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\\frac{\partial z}{\partial r}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{pmatrix}$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi&r\cos\theta\cos\varphi&-r\sin\theta\sin\varphi\\\sin\theta\sin\varphi&r\cos\theta\sin\varphi&r\sin\theta\cos\varphi\\\cos\theta&-r\sin\theta&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\\frac{\partial z}{\partial r}&\frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi&\sin\theta\sin\varphi&\cos\theta\\\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi&\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi&-\frac{1}{r}\sin\theta\\-\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi&\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial z^2}&=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\\&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)-\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\&=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\cos\theta\left(-\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\right)+\frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\\&=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\&=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{\sin2\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\sin2\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\end{aligned}$$

同様にして,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}&=\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\\&=\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\sin^2\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\&\quad+\frac{\sin2\theta\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\frac{\sin2\varphi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}-\frac{\cos\theta\sin2\varphi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}\\&\quad+\frac{\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\left(\sin^2\varphi-2\sin^2\theta\cos^2\varphi\right)}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sin2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}&=\left(\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\\&=\sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\&\quad+\frac{\sin2\theta\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin2\varphi}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\cos\theta\sin2\varphi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}\\&\quad+\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\left(\cos^2\varphi-2\sin^2\theta\sin^2\varphi\right)}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\sin2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \boldsymbol{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}}
\end{aligned}
$$

コメント 果てしなく面倒だが, 手順どおりにやればできる問題である. 微分演算子を左からかけると, 右に来るものを微分してしまうことに注意しよう. すなわち, 例えば

$$
\begin{aligned}
&(\text{誤})\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial\theta} \\
&(\text{正})\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
$$

となる. すると, 掛ける順序によって結果が変わることになる. 上の例で言えば,

$$
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} \neq \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)
$$

そのため, a, b, c が微分演算子を含んだ式のとき, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ とはできず, いちいち $(a+b+c)^2 = aa + ab + ac + ba + bb + bc + ca + cb + cc$ のように計算しなければならない.

問 19.

(a)

$$
\begin{cases} f_x = 3x^2y + y^3 - y = 0 \\ f_y = x^3 + 3xy^2 - x = 0 \end{cases}
\iff
\begin{cases} y\left(3x^2 + y^2 - 1\right) = 0 \\ x\left(x^2 + 3y^2 - 1\right) = 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iff (y = 0 \wedge (x = 0 \vee x = \pm)) \vee (x = 0 \wedge y = \pm 1) \vee \left(3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 = 1\right) \\
&\iff (x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)(\text{複合任意})
\end{aligned}
$$

ヘッセ行列 $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ は,

$$
\begin{aligned}
H &= \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 + 3y^2 - 1 \\ 3x^2 + 3y^2 - 1 & 6xy \end{pmatrix} \\
\operatorname{tr} H &= 12xy \\
\det H &= -9x^4 + 18x^2 - 9y^4 + 6x^2 + 6y^2 - 1
\end{aligned}
$$

$\det H > 0$ となるのは, $(x, y) = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ のとき ($\det H = 2$). $(x, y) = \pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき $\operatorname{tr} H = 3 > 0$ なので極小. $(x, y) = \pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ のとき $\operatorname{tr} H = -3 < 0$ なので極大.

$$
\therefore \begin{cases} \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)} & \textbf{で極小値} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{8}} \\ \boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)} & \textbf{で極小値} \quad \boldsymbol{\frac{1}{8}} \end{cases}
$$

(b)

$$
\begin{cases} f_x = 2x + y - 5 = 0 \\ f_y = x + 2y - 4 = 0 \end{cases}
\iff
\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\operatorname{tr} H &= 4 > 0 \\
\det H &= 3 > 0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \textbf{(2, 1) で極小値} \boldsymbol{-7}
$$

コメント 2 変数関数 $f(x,y)$ の極値の求め方について説明する. $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を解いて $(x,y) = (a,b)$ が得られたとする. ヘッセ行列 $H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$ に (a,b) を代入して, $\det H(a,b) > 0$ となることが極値を取る十分条件である. そのとき, $\mathrm{tr}\, H > 0$ であれば極小値, $\mathrm{tr}\, H < 0$ であれば極大値である. $\det H(a,b) < 0$ のときは鞍点となり, 極値は取らない. $\det H = 0$ のときには 3 次以上の項も調べなければならない. テストで出るとしたら, $\det H = 0$ の場合は出ないだろうからあまり気にしなくとも良い.