2004 年度夏学期 数学 IA　試験問題（坂井）

１年理科Ｉ類　解答用紙２枚計算用紙１枚（持ち込み不可）

2004 年９月１日 10:50-12:20（90 分）

問１． $f(x), g(x), h(x)$ を区間 $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能な関数とする．このとき，次式を満たす実数 $c(a < c < b)$ が存在することを示せ．

$$\det\begin{pmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{pmatrix} = 0.$$

問２． 次の解析関数の，指定された点を中心とした Taylor 展開を求めよ.（ただし，$x=a$ を中心とした Taylor 展開を求めるとは，関数の，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ の形の表示を求めることである.）

$$(a)\frac{x}{1-e^x} \quad (\text{中心 } x=0), \qquad (b)\log(2-2x+x^2) \quad (\text{中心 } x=1), \qquad (c)\sin x \quad (\text{中心 } x=\frac{\pi}{6}).$$

ただし，(a) については，４乗の項まで求めればよい.

問３． 次の関数 $f(x)$ にたいし，$x=0$ における 100 次の微分係数と 101 次の微分係数を求めよ.

$$(a)f(x)=\frac{x}{1-x^{50}}, \quad (b)f(x)=\frac{\sin x^{100}}{1+x}.$$

問４． 次の不定積分を求めよ.

$$(a)\int\frac{x}{x^4-1}dx, \quad (b)\int\sqrt{e^{2x}-1}dx, \quad (c)\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

問５． 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ をそれぞれ $a_n=(1+\frac{1}{n})^n, b_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ で定義する.

(a) 任意の自然数 n について，$a_n < b_n$ を示せ.

(b) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がともに収束することを示せ.

(c) ネピア数 e を $e=\lim_{n\to\infty} a_n$ で定める．$\lim_{n\to\infty} b_n = e$ を示せ.