数学I試験問題2007年夏学期（坂井）

1年理科II,III類　解答用紙2枚 計算用紙1枚（持ち込み不可）

2007年9月4日 10:50-12:20（90分）

問1．　次の解析関数の，指定された点を中心としたTaylor展開を求めよ．(ただし，$x=a$を中心としたTaylor展開を求めるとは，関数の，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ の形の表示を求めることである．)

$(a)(1+x)^{\lambda}$　(中心 $x=0$),　$(b)\exp(2-2x+x^2)$　(中心 $x=1$),　$(c)\cos x$　(中心 $x=\dfrac{\pi}{6}$).

問2．　次の関数 $f(x)$ にたいし，$x=0$ における100次の微分係数と101次の微分係数を求めよ．

$$(a) f(x)=\frac{5x}{1-2x^{50}}, \quad (b) f(x)=\frac{\cos(x^{49})}{1+3x}.$$

問3．　次の不定積分を求めよ．

$$(a)\int \frac{x}{8-2x-x^2}dx, \quad (b)\int \sqrt{4-x^2}dx, \quad (c)\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

問4．　次の極限値を求めよ．

$$(a)\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^{15})-1}{(\mathrm{Arctan} x)^{30}}, \quad (b)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}, \quad (c)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan^2(2x)}-\frac{1}{4x^2}\right).$$

問5．　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ をそれぞれ $a_n=(1+\frac{1}{n})^n, b_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ で定義する．

(a) 任意の自然数 n について，$a_n \leq b_n$ を示せ．

(b) 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ がともに収束することを示せ．

(c) ネピア数 e を $e=\lim_{n\to\infty} a_n$ で定める．$\lim_{n\to\infty} b_n = e$ を示せ．